Il calcolo dei determinanti

Ad ogni matrice quadrata a coefficienti reali è possibile associare un numero reale, detto **determinante**, calcolato secondo un procedimento ben preciso. Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

verrà indicato con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- il determinante di una matrice quadrata di ordine **1** è pari all'unico coefficiente della matrice. In simboli:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

- il determinante di un matrice quadrata di ordine **2** è pari alla differenza dei prodotti dei coefficienti della diagonale principale e di quelli sull'altra diagonale:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $+$

- il determinante di una matrice quadrata di ordine **3** è dato dalla seguente formula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

La si può memorizzare tramite la *regola di Sarrus:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\,\Big|$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Quelli appena elencati sono i casi che più frequentemente si presentano negli esercizi. Per completezza, diamo ora il metodo per ricavare il determinante di una matrice quadrata di ordine n qualsiasi, anche se, per $n \geq 4$, i calcoli diventano laboriosi.

- Sia data una matrice quadrata A di ordine n. Il calcolo del determinante può essere effettuato tramite la *regola di Laplace*. Essa riconduce il problema al calcolo dei determinanti di matrici quadrate di ordine $n-1$. Per ogni coppia di indici (i,j) sia A_{ij} il determinante della matrice ottenuta cancellando la i-esima riga e e la j-esima colonna. Ad esempio:

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cancel{\vdots} & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cancel{a_{n2}} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Lo sviluppo di Laplace del determinante rispetto alla prima riga di A è dato dalla formula:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$$

Nel caso di una matrice quadrata di ordine 4 tale sviluppo è:

$$a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14}$$

Esempio

Calcoliamo

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

Applichiamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_{11}\,A_{11}} \quad - \quad \boldsymbol{a_{12}\,A_{12}} \quad + \quad \boldsymbol{a_{13}\,A_{13}} \quad - \quad \boldsymbol{a_{14}\,A_{14}}$$

$$1\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} -(-1)\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} +0\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

Applicando la regola di Sarrus a ciascuno dei determinanti di ordine 3 si ottiene

$$D = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-6) + 0 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) = -3$$

Osservazioni

- Lo sviluppo di Laplace può essere effettuato rispetto ad una qualunque riga e rispetto ad una qualunque colonna: si può dimostrare che il risultato non cambia. In formule, lo sviluppo di Laplace rispetto alla *i*-esima riga è

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$$

e lo sviluppo di Laplace rispetto alla *j*-esima colonna è

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

Si noti la lieve, ma decisiva, differenza tra la prima e la seconda formula: il termine generale della somma è lo stesso, ma:

- nel primo caso il primo indice (i) è fisso, mentre il secondo (j) varia da 1 a n;
- nel secondo caso il secondo indice (j) è fisso, mentre il primo (i) varia da 1 a n.

Ad esempio, per una matrice quadrata di ordine 4, lo sviluppo di Laplace rispetto alla 2ª riga è dato dalla formula

$$-a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$$

dove il primo indice (2) è fisso, mentre il secondo varia tra 1 e 4.
Lo sviluppo di Laplace rispetto alla 3ª colonna è dato dalla formula

$$a_{13}A_{13} - a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} - a_{43}A_{43}$$

dove il secondo indice (3) è fisso, mentre il primo varia tra 1 e 4.

! Attenzione alla sequenza dei segni: si antepone il segno + ai termini in cui la somma degli indici *i*,*j* è pari, il segno – ai termini in cui la somma degli indici *i*,*j* è dispari.

Proprietà

- Il determinante non cambia se si sostituisce ad una riga la somma di quella riga e di altre righe, eventualmente moltiplicate per costanti. Nell'esempio riportato sopra, sostituiamo alla 1ª riga la differenza tra la 1ª riga e la 3ª riga (ossia la somma della 1ª riga e della 3ª riga moltiplicata per –1):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \; \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad -1} \; + \quad = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Quest'operazione ha annullato un coefficiente della 2ª colonna, che ora ha 3 coefficienti su 4 uguali a 0. Ciò rende particolarmente agevole svolgere lo sviluppo di Laplace rispetto a questa colonna, poiché la somma si riduce ad un solo termine significativo, precisamente:

$$-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Il segno $-$ deriva dal fatto che il coefficiente -1 occupa il posto (3,2), e 3+2=5 è dispari.

- Una matrice ha determinante nullo se ha una riga o una colonna di soli zeri. Infatti si ottiene zero sviluppando il determinante rispetto a quella riga o quella colonna.
  Una matrice ha determinante nullo se una delle sue righe è pari alla somma di altre righe, moltiplicate per opportune costanti: infatti, in tal caso, per quanto osservato al punto precedente, è possibile annullare quella riga senza modificare il determinante. Ma il determinante della nuova matrice è nullo: dunque lo è anche quello della matrice originaria. Ovviamente, lo stesso discorso vale per le colonne.

- Il calcolo del determinante è particolarmente semplice per le **matrici triangolari**: si dice triangolare **superiore** (rispettivamente, **inferiore**) un matrice in cui i coefficienti al di sotto (rispettivamente, al di sopra) della diagonale principale sono nulli. Una matrice che è simultaneamente triangolare superiore ed inferiore si dice **matrice diagonale.**

$$\underset{\text{superiore}}{\underset{\text{matrice triangolare}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{\text{inferiore}}{\underset{\text{matrice triangolare}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{\text{matrice diagonale}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Per un matrice triangolare, il determinante è pari al prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 2 = 8 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 4 = -4$$

- Secondo il *teorema di Binet,* il determinante del prodotto di matrici è pari al prodotto dei determinanti:

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B).$$